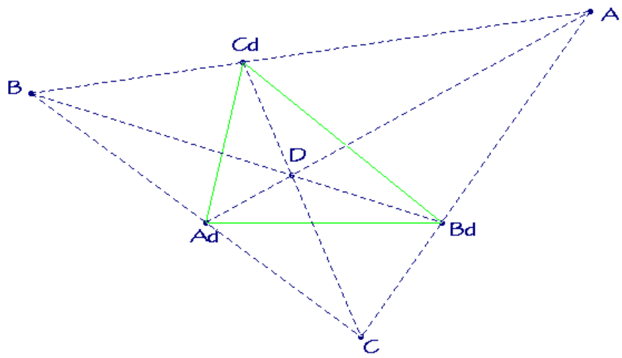
Das Steiner-Dreieck von vier Punkten

Eckart Schmidt

Zu vier Punkten lassen sich drei Vierecke betrachten. Das Dreieck der Diagonalenschnitte sei als Diagonaldreieck angesprochen und das Dreieck der Steiner-Punkte der zugehörigen vollständigen Vierseite als Steiner-Dreieck bezeichnet. Beide Dreiecke sind perspektiv, und ihre Ecken liegen mit dem Perspektivzentrum auf der Zirkularkurve der vier Punkte. Speziell werden abschließend vier konzyklische Punkte betrachtet. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten. Bezugsdreieck kann das Diagonaldreieck oder das Steiner-Dreieck sein.

Diagonaldreieck und Steiner-Dreieck

Will man vier Punkte A, B, C, D in baryzentrischen Koordinaten erfassen, so liegt als Bezugsdreieck das Diagonaldreieck $A_dB_dC_d$ nahe, wobei A_d, B_d, C_d die Diagonalenschnitte der Vierecke $ABDC$, $ABCD$, $ABCD$ sind. Die Seiten des jeweiligen Bezugsdreiecks seien a, b, c.



Jedes Teildreieck der vier Punkte ist dann Anti-Ceva-Dreieck des vierten Punktes bzgl. des Diagonaldreiecks. Gibt man also z.B. dem Punkt D die baryzentrischen Koordinaten u, v, w, so erhält man folgende übersichtliche Darstellung der vier Punkte:

$$A(-u:v:w), \quad B(u:-v:w), \quad C(u:v:-w), \quad D(u,v,w)\,.$$

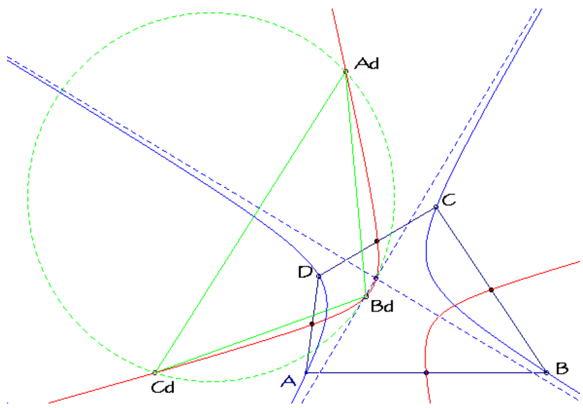
Der Mittenkegelschnitt der vier Punkte mit der Gleichung

$$u^2yz+v^2zx+w^2xy=0$$

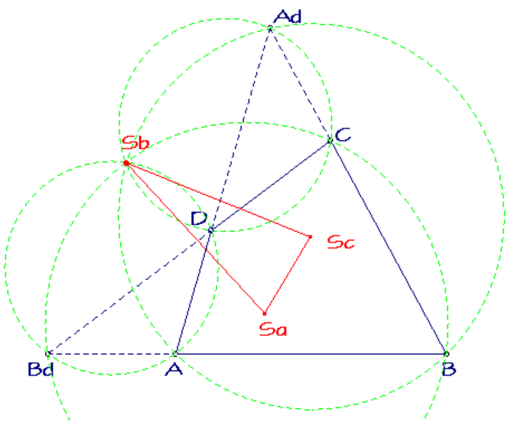
ist offensichtlich ein Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks. Genauer: Der Mittenkegelschnitt ist das Bild der Ferngeraden bei der Konjugation (isoconjugation [1])

$$(x:y:z)\to(u^2yz:v^2zx:w^2xy)\,.$$

Dabei liegt z.B. das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel der vier Punkte auf dem Umkreis des Diagonaldreiecks.



Betrachtet man das vollständige Vierseit zum Viereck *ABCD*, so ist der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiecke ABA_d, BCC_d, CDA_d, DAC_d der Steiner-Punkt des vollständigen Vierseits. Bezeichnet man die Steiner-Punkte zu den Vierecken *ABDC, ABCD, ACBD* mit A_s, B_s, C_s, so erhält man das Steiner-Dreieck als weitere Möglichkeit eines Bezugsdreiecks für eine Geometrie der vier Punkte in baryzentrischen Koordinaten.



Drei Inversionen eines Dreiecks

Zu einem Bezugsdreieck *ABC* werden die Inversionen α, β, γ betrachtet, deren Zentren in einer Ecke des Bezugsdreiecks liegen und die die beiden anderen Ecken vertauschen. Zum Beispiel hat die Inversion α

$$(x:y:z) \xrightarrow[\alpha]{} (a^2yz+b^2zx+c^2xy : -b^2z(x+y+z) : -c^2y(x+y+z))$$

das Zentrum *A* und vertauscht *B* und *C*. Entsprechend seien β und γ definiert. Wählt man normierte baryzentrische Koordinaten $(x+y+z=1)$, so vereinfacht sich die Zuordnungsvorschrift zu:

$$(x:y:z) \xrightarrow[\alpha]{} (p:b^2z:c^2y),$$

wobei p die Potenz des Punktes bzgl. des Umkreises beschreibt:

$$p = -a^2yz - b^2zx - c^2xy .$$

Das Hintereinanderausführen der drei Inversionen ergibt die Identität, d.h. das Verketten von zweien ergibt die dritte.

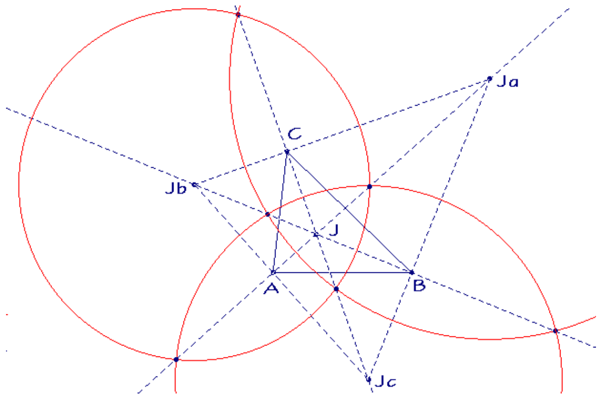
Die drei Inversionen α, β, γ bilden die Inkreismitte $I(a:b:c)$ auf die Ankreismitten $I_a(-a:b:c)$, $I_b(a:-b:c)$, $I_c(a:b:-c)$ ab. Kreise um die Ankreismitten mit den Radien

$$r_a = \sqrt{\frac{2abc}{-a+b+c}}\,,\; r_b = \sqrt{\frac{2abc}{a-b+c}}\,,\; r_c = \sqrt{\frac{2abc}{a+b-c}}$$

sind Fixkreise dieser Inversionen. Diese Fixkreise mit den Gleichungen

$$a^2vw + b^2wu + c^2uv - bcu + cav + abw = 0\,,$$
$$a^2vw + b^2wu + c^2uv + bcu - cav + abw = 0\,,$$
$$a^2vw + b^2wu + c^2uv + bcu + cav - abw = 0$$

schneiden sich senkrecht auf den Winkelhalbierenden und die Schnittpunkte teilen die Verbindungsstrecken der Inkreismitte zu den Ankreismitten harmonisch.



Das Steiner-Dreieck als Bezugsdreieck

Zu einem Bezugsdreieck $A_?B_?C_?$ und einem Punkt $D(u:v:w)$ mit normierten Koordinaten liefern obige Inversionen drei weitere Punkte:

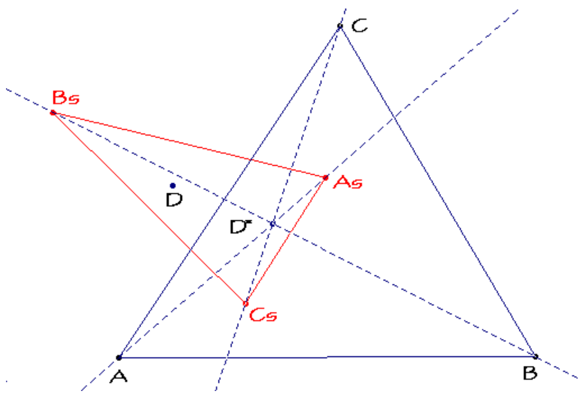
$$A = \alpha(D) = (p : b^2w : c^2v)\,, B = \beta(D) = (a^2w : p : c^2u)$$
$$C = \gamma(D) = (a^2v : b^2u : p)$$

Für diese vier Punkte ist das Bezugsdreieck $A_?B_?C_?$ das Steiner-Dreieck.

Zur Begründung: Betrachtet man das vollständige Vierseit zu dem Viereck *ABCD*, so vertauscht die Inversion β die Gegenecken sowie die Gegenseitenschnitte des Vierecks. Die Umkreise der Teildreiecke ADC_d und BCC_d schneiden sich neben C_d im Steiner-Punkt B_s dieses Vierseits. Bei der Inversion werden aus diesen Umkreisen Geraden durch den Punkt A_d. Daher muss das Zentrum $B_?$ der Inversion β der Steiner-Punkt B_s des vollständigen Vierseits zu *ABCD* sein. Entsprechend sind $A_?=A_s$ und $C_?=C_s$ die Steiner-Punkte der vollständigen Vierseite zu *ABDC* und *ADBC*.

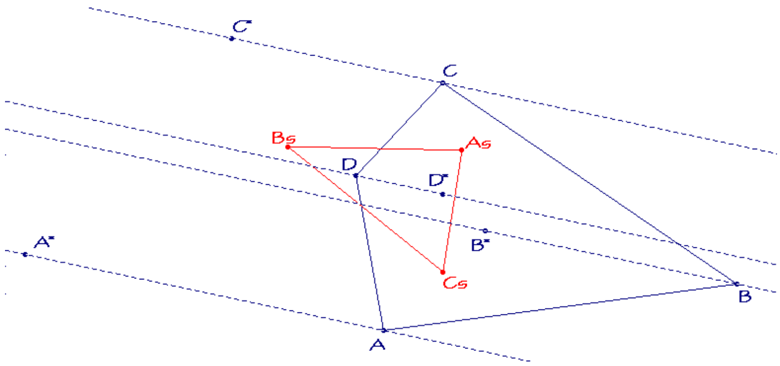
Das Steiner-Dreieck $A_sB_sC_s$ liegt perspektiv zu jedem Teildreieck der vier Punkte. Perspektivzentrum ist das isogonal-konjugierte Bild des vierten Punktes. So liegt z.B. *ABC* perspektiv zu $A_sB_sC_s$ bzgl.

$$D^*(a^2vw : b^2wu : c^2uv)\,.$$



Weiterhin sei angemerkt, dass die Verbindungsgeraden der vier Punkte mit ihren isogonalen Bildern parallel verlaufen durch den Fernpunkt:

$$F(a^2vw + pu : b^2uw + pv : c^2uv + pw)$$



Für die Ecken des Diagonaldreiecks ergibt sich

$$A_d\left(2a^2 : \frac{q^2 - p^2 - 2a^2b^2w^2}{c^2uv - pw} : \frac{q^2 - p^2 - 2a^2c^2v^2}{b^2uw - pv}\right),$$

$$B_d\left(\frac{q^2 - p^2 - 2a^2b^2w^2}{c^2uv - pw} : 2b^2 : \frac{q^2 - p^2 - 2b^2c^2u^2}{a^2vw - pu}\right),$$

$$C_d\left(\frac{q^2 - p^2 - 2a^2c^2v^2}{b^2uw - pv} : \frac{q^2 - p^2 - 2b^2c^2u^2}{a^2vw - pu} : 2c^2\right)$$

$$\text{mit} \quad q^2 = a^2b^2w^2 + b^2c^2u^2 + c^2a^2v^2 .$$

Hinter q^2 verbirgt sich das Produkt aus dem Quadrat des Umkreisdurchmessers und der Summe der Seitenabstandsquadrate des Punktes D.

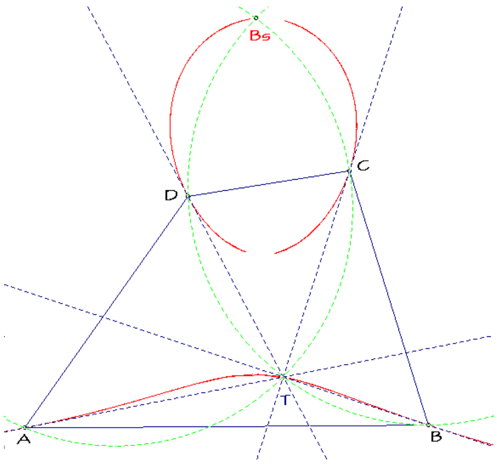
Bildet man die Ecke A_d mit α, B_d mit β und C_d mit γ ab, so erhält man immer den gleichen Punkt :

$$\alpha(A_d) = \beta(B_d) = \gamma(C_d)$$

$$= T\left(\frac{a^2(q^2 - p^2 - 2b^2c^2u^2}{a^2vw - pu} : \frac{b^2(q^2 - p^2 - 2c^2a^2v^2)}{b^2wu - pv} : \frac{c^2(q^2 - p^2 - 2a^2b^2w^2}{c^2uv - pw}\right)$$

Dieser vielseitige merkwürdige Viereckspunkt wird von Stärk in [2] ausführlich behandelt und von ihm als Tangentialpunkt der vier Punkte angesprochen. Konstruktiv erhält man den Tangentialpunkt eines Vierecks als zweiten Schnittpunkt der Kreise durch zwei Gegenecken und den Steiner-Punkt. Die

Namensgebung dieses Punktes orientiert sich an der Zirkularkurve der vier Punkte (s.u.).

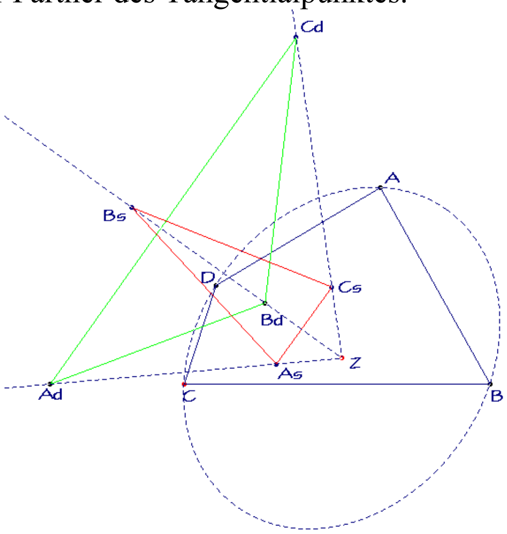


Ein weiterer merkwürdiger Vieleckspunkt

Neben dem Tangentialpunkt soll ein weiterer merkwürdiger Viereckspunkt aufgezeigt werden, das Perspektivzentrum Z von Diagonaldreieck und Steiner-Dreieck:

$$Z\left(\frac{a^2vw-pu}{q^2-p^2-2b^2c^2u^2}:\frac{b^2wu-pv}{q^2-p^2-2c^2a^2v^2}:\frac{c^2uv-pw}{q^2-p^2-2a^2b^2w^2}\right).$$

Damit erweist sich dieses Perspektivzentrum als isogonal konjugierter Partner des Tangentialpunktes.



Angemerkt sei: Der Z-Punkt ist das am Schwerpunkt gespiegelte Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel der vier Punkte und liegt mit diesem auf dem Mittenkegelschnitt.

Die Zirkularkurve zu vier Punkten

Zu einem Bezugsdreieck lassen sich Kurven dritter Ordnung betrachten, invariant unter einer Konjugation (isoconjugation [1]), wobei die Verbindungsgeraden konjugierter Kurvenpunkte kopunktal im sogenannten Pivot-Punkt sind (pivotal isocubics [1]). Nimmt man die isogonale Konjugation und einen Fernpunkt als Pivot-Punkt, so erhält man eine Zirkularkurve (pivotal circular isocubic [1]) . Die Gleichung einer „pivotal isocubic“ zur Konjugation

$$(x:y:z) \quad \rightarrow \quad (k^2yz:l^2zx:m^2zx)$$

mit dem Pivot-Punkt $(p:q:r)$ lautet [1]:

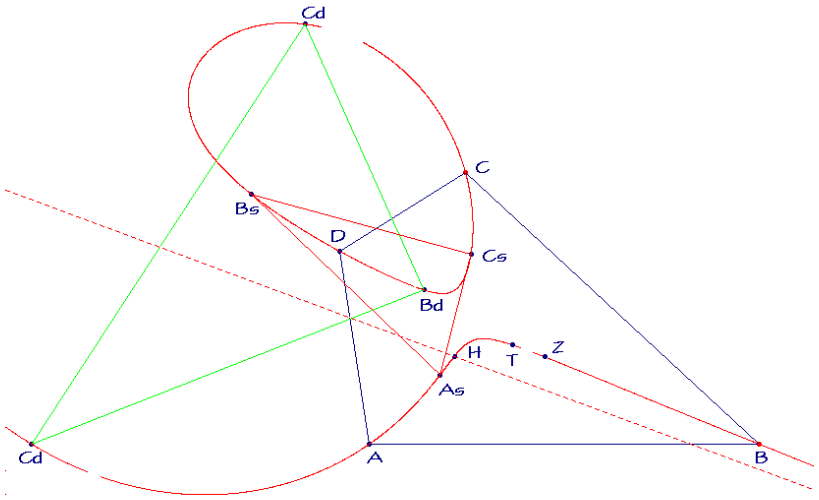
$$k^2yz(ry-qz)+l^2zx(pz-rx)+m^2xy(qx-py)=0\,.$$

Wählt man als Bezugsdreieck das Steiner-Dreieck $A_sB_sC_s$ und zur isogonalen Konjugation

$$(x:y:z) \quad \rightarrow \quad (a^2yz:b^2zx:c^2zx)$$

den Pivot-Punkt im obigen Fernpunkt F der parallelen Verbindungsgeraden der vier Punkte und ihrer isogonal konjugierten Partner, so erhält man die Zirkularkurve der vier Punkte mit der Gleichung

$$(a^2vw+pu)(b^2z^2-c^2y^2)x+(b^2wu+pv)(c^2x^2-a^2z^2)y \\ +(c^2uv+pw)(a^2y^2-b^2x^2)z=0\,.$$



Diese Zirkularkurve geht nicht nur durch die vier Punkte *A, B, C, D* und die Ecken A_s, B_s, C_s des Steiner-Dreiecks, sondern auch durch die Ecken A_d, B_d, C_d des Diagonaldreiecks, das Perspektivzentrum *Z* sowie den Tangentialpunkt *T.* Das isogonale Bild des Fernpunktes *F* ist der Schnittpunkt der Asymptoten mit der Kurve auf dem Umkreis des Steiner-Dreiecks und wird als Hauptpunkt *H* der Zirkularkurve bezeichnet:

$$H\left(\frac{a^2}{a^2vw+pu}:\frac{b^2}{b^2uw+pv}:\frac{c^2}{c^2uv+pw}\right).$$

Die vier Punkte *A, B, C, D* sind korrespondierende Punkte in dem Sinne, dass ihre Tangenten sich auf der Zirkularkurve im Tangentialpunkt *T* schneiden (s.o.).
Die korrespondierenden Punkte des Tangentialpunktes *T* sind die Ecken des Diagonaldreiecks. Allgemein erhält man die korrespondierenden Punkte eines Kurvenpunktes durch die Inversionen α, β, γ. Damit ergibt sich zu vier korrespondierenden Punkten immer das gleiche Steiner-Dreieck. So ist die Zirkularkurve invariant unter diesen Inversionen.

Vier konzyklische Punkte

Von besonderem Interesse sind die Zusammenhänge für vier konzyklische Punkte *A, B, C, D,* für die sich die Zusammenhänge am besten untersuchen lassen, wenn man als Bezugsdreieck das Diagonaldreieck $A_dB_dC_d$ wählt. Benutzt werden die Conway-Abkürzungen

$$2S_A = -a^2+b^2+c^2, \quad 2S_B = a^2-b^2+c^2, \quad 2S_C = a^2+b^2-c^2$$

$$\text{und } S = \sqrt{S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A} = 2\Delta\,.$$

Die vier Punkte liegen dann auf einem Kreis mit der Gleichung

$$S_Au^2 + S_Bv^2 + S_Cw^2 = 0\,.$$

Mittelpunkt ist

$$M(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)\,,$$

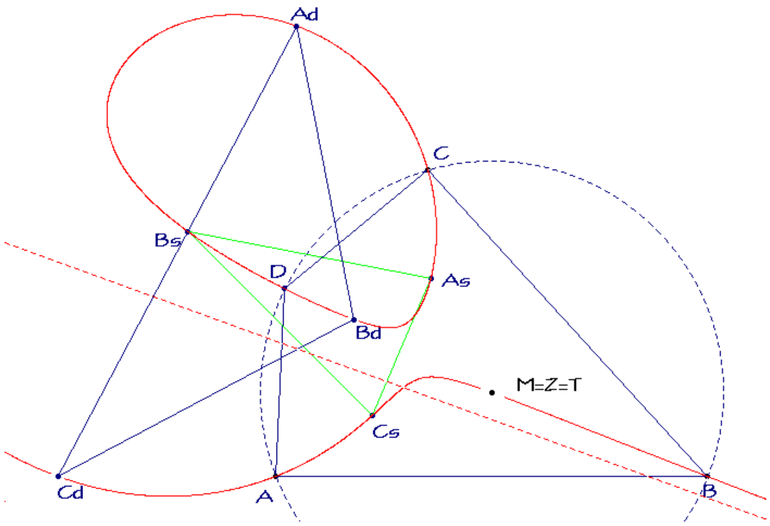
gleichzeitig Höhenschnitt des Diagonaldreiecks. Der Radius ergibt sich zu

$$\sqrt{-\frac{S_AS_BS_C}{S^2}}\,.$$

Die Steiner-Punkte

$$A_s(0:S_C:S_B), \quad B_s(S_C:0:S_A), \quad C_s(S_B:S_A:0)$$

sind die Ecken des Höhenfußpunktdreiecks des Diagonaldreiecks.



Tangentialpunkt *T* und Perspektivzentrum *Z* fallen in die Kreismitte *M*. Eine Kreisspiegelung überführt die Ecken des Steiner-Dreiecks in die Ecken des Diagonaldreiecks und umgekehrt. Damit ist die Zirkularkurve der vier Punkte invariant unter der Kreisspiegelung.
Für das Diagonaldreieck ist besagter Kreis der sogenannte Polarkreis („polar circle“ [3]), d. h. der Kreis, für den die Ecken die Pole der Gegenseiten sind. Nur stumpfwinklige Dreiecke besitzen einen Polarkreis.

Das Steiner-Dreieck ist für vier konzyklische Punkte das Höhenfußpunktdreieck des Diagonaldreiecks. Aus der Sicht des Steiner-Dreiecks fällt der Mittelpunkt in eine Ankreismitte und der Kreis ist einer der oben angesprochenen Fixkreise der Inversionen.

Rückblickend werden die vier Ausgangspunkte als korrespondierendes Quadrupel $\{A,B,C,D\}$ einer Zirkularkurve des Steiner-Dreiecks $A_sB_sC_s$ angesehen. Der zugehörige Tangentialpunkt T liefert mit seinen korrespondierenden Punkten das Diagonaldreieck $A_dB_dC_d$. Zwei korrespondierende Quadrupel einer Zirkularkurve liegen vierfach perspektiv, wobei die Perspektivitätszentren wieder ein korrespondierendes Quadrupel bilden. So erhält man zu $\{A,B,C,D\}$ und $\{A_d,B_d,C_d,T\}$ das korrespondierende Quadrupel $\{A_d^*,B_d^*,C_d^*,Z\}$. Das korrespondierende Quadrupel $\{J_a,J_b,J_c,J\}$ hat als Tangentialpunkt den Fernpunkt der Zirkularkurve, dessen korrespondierende Punkte wieder das Bezugsdreieck liefern. Für vier konzyklische korrespondierende Punkte sind die Quadrupel $\{A_d,B_d,C_d,T\}$, $\{A_d^*,B_d^*,C_d^*,Z\}$, $\{J_a,J_b,J_c,J\}$ identisch.

Literatur:

[1] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/…

[2] R. Stärk und D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002

[3] E. W. Weisstein: „Polar Circle“. – http://mathworld.wolfram.com/PolarCircle.html

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf

http://eckartschmidt.de

eckart_schmidt@t-online.de